PENENTUAN NILAI TOTAL KETIDAKTERATURAN SISI GRAF BARISAN SEGITIGA

Frensiani Ta'dung Allo [1*], Nurdin [2], Loeky Haryanto [3]

Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin (UNHAS), Jln. Perintis Kemerdekaan Km. 10 Makassar 90245, Indonesia

Email: frensiani.math@gmail.com

Abstrak

Pelabelan-k total tidak teratur sisi dari suatu graf G adalah pelabelan sisi dan titik pada G dengan range {1,2,3,…, k} sedemikian sehingga bobot setiap sisi berbeda. Nilai total ketidakteraturan sisi dari G adalah bilangan bulat positif terkecil k sedemikian sehingga G mempunyai suatu pelabelan-k total tidak teratur sisi. Penelitian ini mengkaji tentang nilai total ketidakteraturan sisi pada graf barisan segitiga.

Hasil penelitian diperoleh bahwa nilai total ketidakteraturan sisi graf barisan Segitiga, diperoleh

$$tes\left(TS(t)\right) = t+1$$

, dimana ≥ 2 .

Kata kunci: graf barisan segitiga, pelabelan tidak teratur, pelabelan total tidak teratur sisi, nilai total ketidakteraturan sisi.

1.PENDAHULUAN

Pelabelan graf merupakan suatu topik dalam teori graf. Objek kajiannya berupa graf yang secara umum direpresentasikan oleh titik dan sisi serta himpunan bagian bilangan asli yang disebut label. Pelabelan graf pertama kali diperkenalkan oleh Sadlàčk (1964), kemudian Stewart (1966), Kotzig dan Rosa (1970) dan sampai saat ini pemanfaatan teori pelabelan graf sangat dirasakan peranannya, terutama pada sektor sistem komunikasi dan transportasi, navigasi geografis, radar, penyimpanan data computer, serta dalam bidang kimia, graf diterapkan untuk memodelkan isomer senyawa kimia karbon.

Konsep pelabelan tidak teratur pada suatu graf pertama kali diperkenalkan oleh Chartrand dkk. pada tahun 1986. Namun, makalah mereka "*Irregular network*" baru terbit pada tahun 1988. Pada tahun 2002, Bača dkk. memperkenalkan pelabelan tidak teratur lainnya yang didasarkan pada pelabelan total, yaitu pelabelan total tidak teratur sisi dan pelabelan total tidak teratur titik.Indra dkk (2012) telah menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada sebuah graf khususnya graf barisan segitiga. Namun, Indra dkk (2012) belum menentukan nilai total ketidakteraturan sisi pada graf barisan segitiga. Oleh karena itu, topik penelitian ini adalah bagaimana menentukan nilai total ketidakteraturan sisi graf barisan segitiga.

2.TINJAUAN PUSTAKA

Definisi 2.1.1 *Graf G adalah pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan tidak kosong dari objek-objek yang disebut titik (vertex), dan E adalah himpunan pasangan tidak terurut dari titik-titik berbeda di V yang disebut sisi (edge).*

Definisi 2.1.8 *Sebuah graf G(V,E)dikatakan graf barisan segitiga jika:*

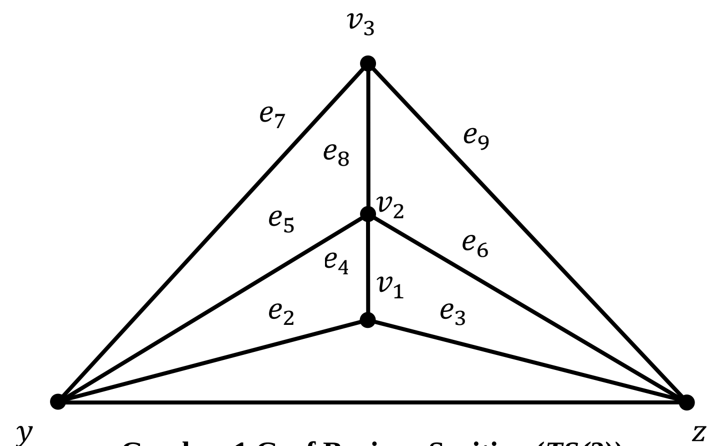
(i) G planar

(ii) terdapat satu sisi bersama (sebagai alas) dari n segitiga-segitiga dan n titik puncaknya terhubung.

(iii) jika $|V| > 3$*, terdapat titik v di V sehingga G\v adalah barisan segitiga.*

Definisi 2.1.9 *Misalkan C=*v_1yzv_1*adalah sebuah segitiga.Misalkan* v_2 *adalah sebuah titik baru di eksterior/diluar C kemudian* v_2 *dihubungkan dengan* v_1*, y dan z. Sebuah vertex baru* v_3 *di luar segitiga* v_2yzv_2*, kemudian* v_3 *dihubungkan dengan* v_2*, y dan z.*

Jika banyaknya titik tambahan dari C adalah t, maka barisan segitiga dinotasikan TS (t). Dalam Gambar 4(a), sisi yz dari C merupakan selalu sebuah sisi dari semua segitiga yang dibentuk dari $v_1, v_2, v_{3,\dots}\, v_i$ *adalah penghubung (tulang belakang) dari TS (t).*



Gambar 1.Graf Barisan Segitiga (*TS(3)*)

Definisi 2.3.1 *Misalkan* $G = (V, E)$ *adalah suatu graf yang tidak memuat sisi terisolasi atau dua titik terisolasi. Fungsi* $f : E \to \{1, 2, \cdots, k\}$ *disebut pelabelan-k tidak teratur (irregular k-labeling) pada* G*, jika untuk setiap* $x, u \in V$ *dengan* $x \neq u$*, berlaku*

$$w(x) \neq w(u)$$

di mana,

$$w(x) = \sum_{xy \in E} f(xy) \text{ dan } w(u) = \sum_{uv \in E} f(uv)$$

Definisi 2.4.1. *Misalkan* $G = (V, E)$ *adalah suatu graf. Fungsi* $f: V \cup E \to \{1, 2, \cdots, l\}$ *disebut pelabelan-l total tidak teratur sisi (edge irregular total* l*-labeling) pada* G*, jika untuk setiap dua sisi* xy *dan* uv *yang berbeda dalam* E*, berlaku*

$$wt(xy) \neq wt(uv), \text{ dimana}$$

$$wt(xy) = f(x) + f(xy) + f(y) \text{ dan } wt(uv) = f(u) + f(uv) + f(v).$$

Teorema 1 *(Bača,dkk.,2007)*

Misalkan $G = (V, E)$ adalah suatu graf dengan himpunan titik tak kosong *V(G)* dan himpunan sisi *E(G)*, dan $|E|$ menyatakan banyaknya sisi di G , maka

$$\left\lceil \frac{|E| + 2}{3} \right\rceil \leq tes(G) \leq |E|.$$

Untuk membuktikan batas atas *tes(G)*, perhatikan bahwa jika setiap titik V di G diberi label dengan bilangan 1 dan setiap sisi secara berurutan diberi $1, 2, 3, \dots, |E|$, maka terlihat bahwa bobot setiap sisinya akan berbeda

$$wt(e) \neq wt(f)$$

dengan label terbesar adalah $|E|$. Karena itu, $tes(G) \leq \ |E|$.

Untuk membuktikan batas bawah *tes(G)*, misalkan λ merupakan pelabelan total tak teratur sisi yang optimal dari G, maka bobot-bobot sisi pada G, secara berurutan adalah $3,4, \dots, |E| + 2$. Bilangan $|E| + 2$ merupakan jumlah dari tiga buah bilangan bulat positif (tiga label), sehingga sedikitnya terdapat satu label dengan nilai tidak kurang dari $\left\lceil\frac{|E|+2}{3}\right\rceil$. Karena itu, $\left\lceil\frac{|E|+2}{3}\right\rceil \leq \ tes(G)$.

Jadi , $\left\lceil\frac{|E|+2}{3}\right\rceil \leq \ tes(G) \leq \ |E|$. ■

3.HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1. Graf Barisan Segitiga (*TS(t)*)

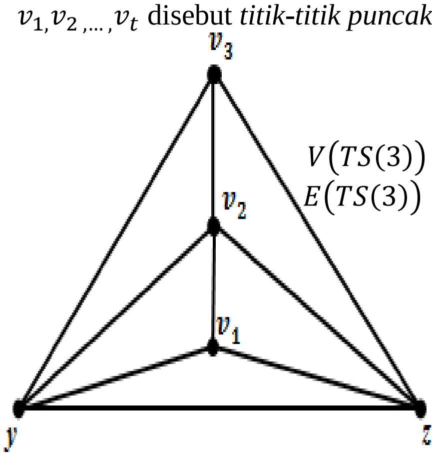
Suatu barisan segitiga $TS(t)$ untuk suatu $t \geq 2$ adalah sebuah graf dengan himpunan titiknya

$$V\big(TS(t)\big) = \{y, z, v_i \ | i = 1,2, \dots, t\}$$

dan himpunan sisinya

$$E\big(TS(t)\big) = \{yz, yv_i \ , zv_i \ | i = 1,2, \dots, t\} \cup \{v_i v_{i+1} \ | i = 1,2, \dots, t-1\}$$

Sisi *yz* disebut *alas* dari *TS*(*t*), sisi-sisi yv_i dan zv_i disebut *kaki-kaki* dari *TS*(*t*) dan titik-titik $v_{1,} v_{2\ ,\dots,} v_t$ disebut *titik-titik puncak* dari *TS*(*t*).



$$V\big(TS(3)\big) = \{y, z, v_1, v_2, v_3\},$$
$$E\big(TS(3)\big) = \big\{yz, yv_1, zv_1, yv_{2,} zv_2, yv_3, zv_3\big\} \cup \{v_1v_2, v_2v_3\}$$

Gambar 2. Graf Barisan Segitiga (TS(3)

3.2. Nilai Total Ketidakteraturan Sisi Graf Barisan Segitiga

Teorema 2.

Misalkan $TS(t)$ adalah suatu graf barisan segitiga dengan $t \geq 2$, maka

$$tes(TS(t)) = t + 1.$$

Bukti

Untuk membuktikan bahwa $tes\big(TS(t)\big) \geq t + 1$, perhatikan bahwa berdasarkan definisi himpunan sisi dari $TS(t)$ diperoleh$|E\ TS(t)| = 3t$.

Dengan menggunakan Teorema 1, diperoleh

$$tes(TS(t)) \geq \left\lceil \frac{3t+2}{3} \right\rceil = t+1 .$$

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $tes(TS(t)) \leq t+1$.
Akan didefinisikan pelabelan-λ tidak teratur sisi pada $TS(t)$ sebagai berikut:

$\lambda(yz) \quad = 1$,
$\lambda(yv_i) \quad = 1$, untuk $i = 1,2, \dots, t$,
$\lambda(zv_i) \quad = t+1$, untuk $i = 1,2, \dots, t$,
$\lambda(v_i v_{i+1}) = t-(i-2)$, untuk $i = 1,2, \dots, t-1$,
$\lambda(y) \quad = 1$,
$\lambda(z) \quad = t+1$, dan
$\lambda(v_i) \quad = i$, untuk $i = 1,2, \dots, t$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa λ merupakan pelabelan total tidak teratur sisi pada *TS(t)*, yaitu :

1. $wt(yv_i) = 2+i$, untuk $i = 1,2, \dots, t$
2. $wt(yz) = 2+(t+1) = 3+t$, untuk $i = 1,2, \dots, t$
3. $wt(v_i v_{i+1}) = t+i+3$, untuk $i = 1,2, \dots, t-1$
4. $wt(zv_i) = 2t+2+i$, untuk $i = 1,2, \dots, t$

Berdasarkan definisi bobot sisi tersebut, diperoleh

$$\begin{aligned} wt(yv_1) = 3 < wt(yv_2) = 4 \dots < wt(yv_t) = 2+\mathrm{t} < wt(yz) = 3+\mathrm{t} < wt(v_1v_2) \\ = 4+\mathrm{t} < wt(v_2v_3) = 5+\mathrm{t} \dots < wt(v_{t-1}v_t) = 2t+2 < wt(zv_1) \\ = 2t+3 < wt(zv_2) = 2t+4 \dots < wt(zv_t) = 3t+2. \end{aligned}$$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa bobot setiap sisi pada *TS(t)* berbeda .
Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa label terbesar yang digunakan adalah $t+1$.

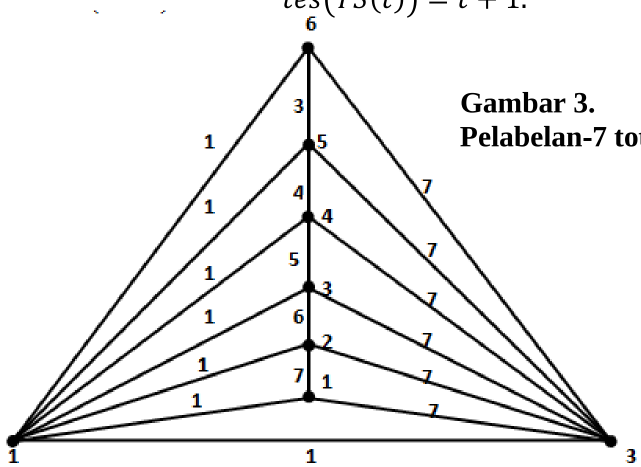
Perhatikan bahwa jelas diperoleh:

- $\lambda(yz) = 1 < t+1$, ntuk $i = 1,2, \dots, t$
- $\lambda(yv_i) = 1 < t+1$, ntuk $i = 1,2, \dots, t$
- $\lambda(zv_i) = t$, ntuk $i = 1,2, \dots, t$
- $\lambda(v_i v_{i+1}) = t-(i-2) \leq t+1$, $i = 1,2, \dots, t-1$

Karena itu *TS(t)* memiliki suatu pelabelan-*k* total tidak teratur sisi, dimana $k = t+1$.
Dengan demikian , diperoleh $tes\big(TS(t)\big) \leq t+1$.

Karena $tes\big(TS(t)\big) \geq t+1$ dan $tes\big(TS(t)\big) \leq t+1$, maka

$$tes\big(TS(t)\big) = t+1. \qquad \blacksquare$$



Gambar 3.
Pelabelan-7 total tidak teratur sisi pada graf *TS(6)*

3.1. Pelabelan-7 Total Tidak Teratur Sisi dengan Menggunakan Program Maple

Dengan menggunakan program Maple v18, pelabelan-7 total tidak teratur sisi dinyatakan melalui tiga hasil berikut :

1. Pelabelan titik pada *TS(6)*

- Himpunan titik dinyatakan $[1,2,3,4,5,6, y, z]$
- Pelabelan titik ke-*v* yang menghasilkan nilai label Lambda(*v*)

v = Lambda(*v*)

LblTtkAL:={1=1, 2=2, 3=3, 4=4, 5=5, 6=6, y=1, z=7}

atau

Lambda(*v*) = *v*

LblTtkAL:={1=1, 1=y, 2=2, 3=3, 4=4, 5=5, 6=6, 7=z }.

Dalam matriks diagonal sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Dengan fungsi pelabelan berikut

1. Lambda: 1 → 1,
2. Lambda: 2 → 2,
3. Lambda: 3 → 3,
4. Lambda: 4 → 4,
5. Lambda: 5 → 5,
6. Lambda: 6 → 6,
7. Lambda: y → 1,
8. Lambda: z → 7.

2. Pelabelan Sisi pada *TS(6)*

- Di dalam Maple v18, himpunan sisi-sisi *TS*(6) dinyatakan sebagai

{{1, 2}, {1, y}, {1, z}, {2, 3}, {2, y}, {2, z}, {3, 4}, {3, y}, {3, z}, {4, 5}, {4, y}, {4, z}, {5, 6}, {5, y}, {5, z}, {6, y}, {6, z}, {y, z}} atau salah satu pelabelan sisi yang optimal dinyatakan oleh matriks

$$\begin{bmatrix} 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 7 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 7 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 7 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 7 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan aturan pelabelan berikut

1. Lambda: {1, y} → 1,
2. Lambda: {2, y} → 1,
3. Lambda: {3, y} → 1,
4. Lambda: {4, y} → 1,
5. Lambda: {5, y} → 1,
6. Lambda: {6, y} → 1,
7. Lambda: {y, z} → 3,
8. Lambda: {5, 6} → 4,
9. Lambda: {4, 5} → 5,
10. Lambda: {3, 4} → 1,
11. Lambda: {2, 3} → 1,
12. Lambda: {1, 2} → 7,
13. Lambda: {1, z} → 7,
14. Lambda: {2, z} → 7,
15. Lambda: {3, z} → 7,
16. Lambda: {4, z} → 7,
17. Lambda: {5, z} → 7,
18. Lambda: {6, z} → 7.

3. Bobot sisi-sisi pada *TS(6)*

Jika pelabelan titik dan sisi *TS(6)* digabung, diperoleh matriks pelabelan

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 7 & 2 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 7 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 7 & 0 & 6 & 4 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 7 & 0 & 6 & 0 & 5 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Bobot $\{i, j\}$ = L(i, i) + L(i, j) + L(j, j)

Bobot $\{i, j\}$ = Lambda(i) + Lambda ($\{i, ,j\}$) + Lambda (j), di mana $i \neq j$.

Jadi, bobot sisi {1, 2} = 10;{1, y} = 3;{1, z} = 15;{2, 3} = 11;{2, y} = 4;{2, z} = 16;
{3, 4} = 12;{3, y} = 5;{3, z} = 17;{4, 5} = 13;{4, y} = 6;{4, z} = 18;
{5, 6} = 14;{5,y}=7;{5,z}=19;{6, y} = 8;{6, z} = 20;{y, z }= 9.

Terlihat nilai-nilai bobot sisi dari pelabelan tak teratur *TS(6)* semuanya berbeda.

Dalam notasi matriks, pembobotan ini dinyatakan sebagai matriks

$$\begin{bmatrix} 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 15 \\ 10 & 0 & 11 & 0 & 0 & 0 & 4 & 16 \\ 0 & 11 & 0 & 12 & 0 & 0 & 5 & 17 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 13 & 0 & 6 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & 0 & 14 & 7 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 14 & 0 & 8 & 20 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 0 & 9 \\ 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

4.PENUTUP

4.1. Kesimpulan

Dengan menggunakan pelabelan total tidak teratur sisi pada graf $TS(t)$ maka diperoleh nilai total ketidakteraturan sisi graf $(TS(t))$ yaitu
$tes((TS(t)) = t + 1$.

4. 2 Saran

Pembahasan mengenai pelabelan total tidak teratur sisi masih terbuka bagi peneliti lain untuk melanjutkan penelitian ini dan bisa juga melakukan penelitian yang sejenis dengan jenis-jenis graf yang berbeda.

DAFTAR PUSTAKA

[1].M.Bača, J. Jendroľ, M. Miller, and J. Ryan, *On irregular total labellings, Discrete Math*, 307 (2007) 1378-1388.

[2].J.Danciger,S.Devadoss and D.Sheeby , *Compatible Triangulations and point partitions by series-triangular graphs*, 34(3)(2006)195-202.

[3].R.Munir,*Matematika Diskrit*,Penerbit Informatika , Bandung, (2010) 354- 360.

[4] .I.Rajasingh,B. Rajan,and V.Annamma,*On Total Vertex Irregularity Strenght of Triangle Related Graphs*.(2012)108-116.

[5].E.Saputra, *Menentukan Nilai ketidakteraturan pada graf Kembang Api yang Diperumum*, FMIPA Unhas . 2013.

[6].E.Sintadewi,*Penentuan Nilai Total Ketidakteraturan Sisi Analgamasi Dua Graf Lingkaran yang Isomorfik*. FMIPA Unhas . 2011.